Exercices et problèmes

23 Un sac contient n boules rouges et 2n boules noires indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée. On tire simultanément trois boules du sac.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que parmi ces trois boules, il y ait une seule rouge ?

En déduire que (p_n) possède une limité finie que l'on notera p.

2. Quelle est la probabilité q_n pour que parmi ces trois boules, il y ait au moins une Rouge ? En déduire que (q_n) possède une limité finie que l'on notera q.

3. On effectue trois tirages successifs d'une seule boule en remettant la boule tirée dans le sac avant d'effectuer le tirage suivant.

a. Montrer que la probabilité d'obtenir une seule boule rouge est égale à p.

b. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est égale à q.

24 Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse.

1. Une machine les teste une par une, jusqu'à détecter la pièce défectueuse.

Elle effectue le $n^{ème}$ test, dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.

a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?

b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux tests ?

c. Déterminer la loi de probabilité de X.

d. Calculer l'espérance et la variance de X.

(On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

2. Dans cette question, on suppose que les tests sont effectués par un homme et que s'il ne reste que deux pièces, celui-ci ne fait alors qu'un test supplémentaire.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.

a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?

b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement $n-1$ tests ?

c. Déterminer la loi de probabilité de Y.

d. Calculer l'espérance et la variance de Y.

25 Un joueur joue à pile ou face avec la règle suivante :

Il gagne dès que le nombre de fois où pile apparaît dépasse de deux le nombre de fois où face apparaît.

Il perd dès que le nombre de fois où face apparaît dépasse de deux le nombre de fois où pile apparaît.

On suppose que la pièce utilisée par le joueur est truquée de sorte qu'elle amène pile avec la probabilité $\frac{5}{12}$ et face avec la probabilité $\frac{7}{12}$.

1. Montrer que le joueur doit jouer un nombre pair de lancers pour gagner.

2. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 2 lancers.

3. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 4 lancers.

4. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de n lancers.

5. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 20 lancers.

26 On choisit un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0,1]$.

1. Quelle est la probabilité que x soit égal à 0.1 ? 0.0005 ? 0.99999 ?

2. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.5,1]$?

3. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.001,\ 0.002]$?

4. Quelle est la probabilité que x soit plus petit que 0.99999 ?

5. Quelle est la probabilité que x soit plus gand que 0.99999 ?

27 Dans la journée, un bus passe toutes les 20 minutes à une station.

Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.

On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0,20]$.

1. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 2 et 5 minutes ?

2. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 10 et 13 minutes ?

3. Quelle est la probabilité que cette personne attende exactement 3 minutes ?

4. Quelle est la probabilité que cette personne attende moins de 3 minutes ?